

LXII олимпиада по точным наукам учащихся Эстонии МАТЕМАТИКА, ШКОЛЬНЫЙ ТУР

Таллинн, 15 января 2015 года

XII класс

Время, отводимое для решения: 4 часа.

Верное и достаточно обоснованное решение каждой задачи дает 7 баллов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.

1. Числа a , 11, b являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Числа a , 12, b являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найди значение $a^2 + b^2$.

2. Реши уравнение: $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -\frac{1}{2}$.

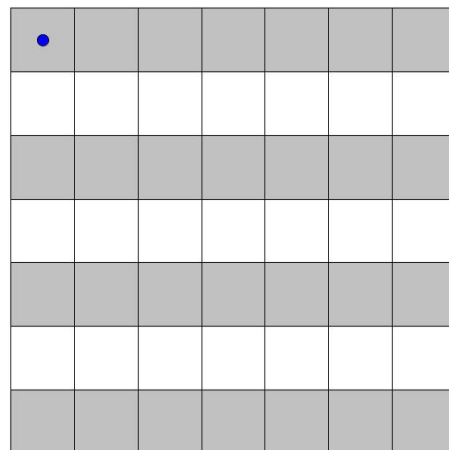
3. В прямоугольнике $ABCD$ даны длины сторон $AB=1$ см и $AD=4$ см. На стороне AD как на диаметре строится окружность с центром в точке O . Найди площадь общей части прямоугольника и круга.

4. Опираясь на неравенство Коши докажи, что для каждого числа $n \in \mathbb{Z}^+$ выполняется неравенство $n + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq n \cdot \sqrt[n]{n+1}$

Неравенство Коши: пусть $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_n \geq 0$, тогда

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}, \text{ где } n \geq 2.$$

5. Черепаха Катрин может двигаться по клетчатому полю в шести различных направлениях: вверх, вниз, и в четырех направлениях, соответствующих диагоналям. Среди животных проходит соревнование, в котором необходимо начав движение в верхней левой клетке поля (см. рисунок) за кратчайшее время побывать во всех клетках поля 7×7 и вернуться обратно. Черепаха движется очень медленно, поэтому она хочет пройти путь сделав как можно меньше шагов (каждый переход в следующую клетку считается шагом).



Найди наименьшее число шагов, которые должна сделать черепаха, чтобы посетить все клетки поля и вернуться назад.